



ANALYSE DU PROCESSUS DE RESOLUTION D'UN PROBLEME ECONOMIQUE A TRAVERS LES TECHNIQUES D'OPTIMISATIONS

ANALYSIS OF THE PROCESS OF RESOLVING AN ECONOMIC PROBLEM THROUGH OPTIMIZATION TECHNIQUES

| Nazha EL Boufi ^{*1} | et | Said Abouhanifa ² |

¹ Faculté des sciences et techniques | Laboratoire de Recherche en Economie Théorique et Appliquée (LARETA) | Université Hassan 1 | Settat | Maroc |

² Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation, Casablanca-Settat | Département de Mathématique | Settat | Maroc |

| Received 14 March 2019 |

| Accepted 27 April 2019 |

| Published 03 May 2019 |

| ID Article | Nazha-ManuscriptRef.7-ajira170419 |

RESUME

Introduction : Nous présentons les résultats d'une étude qui vise l'analyse du processus de résolution d'un problème économique par le biais des techniques d'optimisations sous contraintes. **Contexte :** Dans le cadre du processus d'enseignement apprentissage de la microéconomie comme branche des sciences économiques, nous tentons de faire un état des lieux des connaissances des étudiants sur quelques aspects, afin de comprendre comment ils conçoivent le processus de production et de consommation, d'un point de vue de la transposition du savoir économiques en situation de formation. **Objectifs :** Etudier l'articulation entre les notions des sciences économiques et les outils mathématiques adéquats pour modéliser et résoudre un problème économique sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. **Méthodes :** Sur la base des travaux de Lecaillon (2005) relatives à la théorie néoclassique, l'apport de l'analyse Néo-classique a porté sur quatre grands axes formant ainsi le domaine de la microéconomie dans ce cadre d'enseignement. Nous avons administré à des étudiants du niveau première année, de la section sciences économiques et gestion à l'université, un problème faisant appel de l'émergence du développement du comportement du consommateur qui aboutit à la construction de la théorie de la demande. **Résultats :** Les résultats montrent que même si les procédures syntaxiques de résolution, pour la plupart des étudiants sont mieux représentées, de nombreux étudiants mobilisent peu les autres composantes du contrôle. Le problème d'optimisation proposé sollicite à l'étudiant d'avoir un grand contrôle sémantique des concepts en jeu ainsi que certaines métaconnaissances. **Conclusions :** Nous avons remarqué que la coordination et le manque de développement de différentes composantes de la stratégie de contrôle étaient plus problématiques pour une bonne maîtrise de la démarche de résolution de problèmes économiques.

Mots-clés : Micro-économie, optimisation sous contrainte, résolution de problèmes, problème économique, le contrôle.

ABSTRACT

Background: We present the results of a study aimed at analyzing the process of solving an economic problem by means of constraint optimization techniques. **Context:** As part of the learning process in the field of microeconomics, we try to make an inventory of students' knowledge of some aspects, in order to understand how they conceive the process of production and consumption, of a point of view of the transposition of economic knowledge into a training situation. **Objectives:** To study the link between the notions of economics and the mathematical tools needed to model and solve an economic problem in the form of an optimization problem under constraints. **Methods:** Based on Lecaillon's (2005) work on neoclassical theory, the contribution of neo-classical analysis focused on four main axes, thus forming the domain of microeconomics in this teaching environment. We have administered to students in the first year of Economics and Management at the University, a problem involving the emergence of the development of consumer behavior that leads to the construction of the theory of demand. **Results:** The results show that even if syntactic resolution procedures, for most students are better represented, many students do not mobilize the other components of the control. The proposed optimization problem requires the student to have a great semantic control of the concepts involved as well as some metaconnaissances. **Conclusion:** We noticed that the coordination and the lack of development of different components of the control strategy were more problematic for a good control of the process of solving economic problems.

Keywords: Economics, constrained optimization, problem solving, economic problem, control.

1. INTRODUCTION

La microéconomie traditionnelle résultant des travaux réalisés par l'économie mathématique néoclassique des années 40 et 50, entre les apports du courant marginaliste du XIXe siècle et la théorie de l'équilibre général de Walras et de Pareto, qui se fonde sur la rationalité des individus engagés dans des échanges marchands. Le principe de rationalité désigne que les individus utilisent au mieux les ressources dont ils disposent en tenant compte des contraintes qu'ils subissent.

Les choix réalisés émanent de comportements optimisateurs. Le consommateur dépense son revenu aux usages qui lui procurent le maximum de satisfaction. Le producteur combine le facteur travail et le facteur capital de manière à réaliser un profit maximum. Ce qui intéresse la microéconomie, c'est dans un premier temps l'étude des choix des agents économiques, c'est-à-dire de la manière dont ils procèdent à des arbitrages entre différentes options envisageables, en

comparant leurs avantages et leurs inconvénients pour la poursuite de la satisfaction de leurs intérêts. Cette démarche opère par conséquent par scission des moyens (les options envisageables) et des fins (les intérêts ou aspirations des agents). Le cadre d'analyse de la micro-économie s'articule autour du tryptique, selon Lesourne et al., (2002) (Leçons de microéconomie évolutionniste, la rationalité optimisatrice, équilibre et efficacité) ; la rationalité optimisatrice suppose que tous les agents sont dotés d'une fonction-objectifs qu'ils maximisent compte tenu de leurs contraintes [1]. Simon (1982) la qualifie de rationalité substantive dans la mesure où n'y sont pris que les résultats du choix [2]. La maximisation porte sur une utilité. Elle s'incarne en un ensemble de modèles économiques dont les plus importants sont la maximisation du profit de l'entreprise sous contraintes des possibilités techniques formalisées par la fonction de production, la maximisation de l'utilité du consommateur sous la contrainte de budget. L'équilibre se définit comme une configuration économiquement réalisable dans laquelle aucun agent ne peut améliorer son sort par une modification unilatérale de son action. L'efficacité considère le marché concurrentiel comme le dispositif institutionnel fondamental, celui qui est censé permettre une résolution efficace de tous les problèmes de coordination auxquels l'ordre marchand peut être confronté.

L'analyse microéconomique suggère une modélisation du fonctionnement des transactions marchandes. Comme toute modélisation, un ensemble d'hypothèses sont émises en considérant les caractéristiques les plus représentatives de l'objet d'étude. Grâce à la clarté et la rigueur qu'ils apportent au raisonnement économiques, les mathématiques sont devenues l'outil privilégié des analyses économiques.

Dans une conférence qui s'intitule Mathématique et Science Economique, Darreau (2000) a étudié les questions suivantes [3]: Les mathématiques servent à résoudre des problèmes économiques et de quels problèmes économiques s'agit-il ? Ce sont des problèmes de choix, de coordination des choix, d'interdépendance des phénomènes, et des problèmes de stratégies.

La microéconomie, comme domaine de la science économique, a fait des progrès, les méthodes de raisonnement et d'observation de la réalité font intervenir des outils mathématiques et utilisent la puissance de calcul des ordinateurs pour analyser des données chiffrées qui sont l'équivalent des explorations spatiales. Cependant, la plupart des difficultés des étudiants relevés dans l'apprentissage de la microéconomie viennent du manque de stratégies de combiner entre ces deux domaines.

L'analyse Néo-classique a porté sur quatre grands axes formant ainsi ce que l'on appelle communément la théorie néoclassique [4].

- L'analyse du comportement du consommateur qui aboutit à la construction de la théorie de la demande.
- L'analyse du comportement du producteur dont l'objectif est de bâtir la théorie de l'offre.
- L'équilibre du marché ou ce qui est appelé la théorie de l'équilibre partiel.
- L'équilibre général avec comme finalité la construction de la théorie de l'optimum économique [5].

A l'université, le sujet d'interdisciplinarité entre les mathématiques et les sciences économiques peut intéresser les étudiants qui choisissent à faire des études en sciences économiques, peut intéresser les économistes qui se questionnent sur la méthode qu'ils utilisent, peut intéresser le grand public qui s'entonne du jargon scientifique de la science économique. Nous avons choisi d'étudier l'articulation entre les notions des sciences économiques et les outils mathématiques adéquats pour modéliser et résoudre un problème économique sous la forme d'un problème d'optimisation avec contraintes, dans le cadre du processus d'enseignement apprentissage de la microéconomie, parce que nous voulons comprendre comment fonctionne le processus de production et de consommation d'un point de vue de la transposition du savoir économiques en situation de formation. A travers l'analyse des comportements du consommateur et du producteur, les néoclassiques bâtissent leur théorie de la production et de la répartition des richesses et proposent en même temps, leur propre définition de l'optimum économique dans un contexte de libre concurrence.

L'usage de la définition qui permet de dire que le langage mathématique dit plus que le langage verbal, parce qu'il donne les moyens de focaliser l'attention sur la dimension mesurable des phénomènes économiques [6].

Les économistes peuvent alors utiliser les deux définitions des mathématiques pour affirmer que les mathématiques permettent de focaliser l'attention sur des relations statistiques insoupçonnées par les statisticiens et de sortir l'économiste de la complexité du réel. Les mathématiques sont un outil irremplaçable au service de la formation d'hypothèses immédiatement testables. L'économie soutient donc la nécessité des mathématiques à la science économique sur deux arguments qui sont : la précision et la mesure.

Dans notre contexte d'enseignement à l'université, nous avons constaté qu'un bon nombre d'étudiants de la première année de la section science économique et gestion changent de procédures de résolution selon la consigne de travail, même si la structure du problème proposé reste la même. Éventuellement, il est possible que les étudiants échouent à résoudre certains problèmes non parce qu'ils ne maîtrisent pas les procédures nécessaires. Mais parce que leur contrôle, de la situation n'évoque pas les procédures adaptées à la résolution du problème [7].

Nous supposons que l'importance du contrôle exercé dans le processus de résolution de problèmes et la place qu'il occupe dans le processus d'enseignement apprentissage, peut rejoindre le propos de Selden et al., (1999) qui suppose que le manque de contrôle exercé par les étudiants lors de la résolution d'un problème peut expliquer certaines difficultés

à décider de ce qui est essentiel dans une situation et à percevoir les apprentissages comme une continuité [8]. Nous envisageons apporter une réponse à la question : Comment combiner entre les notions des sciences économiques et les outils mathématiques adéquats pour modéliser et résoudre un problème économique sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes et quelle sont les difficultés des étudiants dans la mise en œuvre efficace du processus de résolution de ce type de problème ?

Nous faisons l'hypothèse que la capacité d'articuler les différentes composantes du contrôle développé par Saboya (2010) and Dufour et Jeannotte (2013) contribuent de manière significative à repérer les indicateurs du contrôle exercé par les étudiants sur leur propre activité économique [9, 10].

2. EMERGENCE DE L'USAGE DES MATHÉMATIQUES EN SCIENCES ÉCONOMIQUES

L'économie en tant que science sociale se caractérise par des implications profondes de principes, de méthodes d'analyses et de recommandations issues des conséquences vérifiables des principes théoriques. Tous résultats doivent être confrontés à une observation précise de la réalité, par exemple au moyen des outils mathématiques. Lorsqu'un résultat ne se conforme pas à la réalité, il peut être ramené en cause. Cette logique apparaît parfois comme un assujettissement, mais c'est elle qui attire la plupart des étudiants qui veulent devenir économistes.

Les sciences économiques est un champ fécond de l'application des mathématiques. La première mathématisation des problèmes économiques est accomplie par Cournot (1838) "recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses" [11]. Cournot explique la théorie des jeux à travers l'exemple de la concurrence de deux entreprises bataillant pour se partager le marché. Chaque entreprise agit en fonction du comportement de son concurrent. La théorie des jeux formalise les stratégies à adopter. Ensuite le calcul matriciel avec le modèle entrées-sorties classique de Leontief (1936) [12]. Ce modèle est basé sur l'hypothèse que la demande intermédiaire d'une branche dépend de son niveau de production. Ce rapport entre les outputs et les inputs intermédiaires est représenté par les coefficients techniques d'inputs. Ceux-ci sont obtenus en divisant chaque colonne de la matrice des consommations intermédiaires par la production de la branche associée à celle-ci. Euler et Lagrange, développent le calcul variationnel. Ce dernier crée une technique capitale en optimisation connue aujourd'hui sous le nom de multiplicateurs de Lagrange.

3. LE CONTRÔLE EXERCÉ À L'AUNE DE LA RÉOLUTION DE PROBLÈME

3.1. Le concept contrôle : Pour une éventuelle résolution de problème économique, les étudiants auront besoin d'une stratégie métacognitive qui s'appelle le contrôle. Dans la vie de tous les jours, le contrôle est considéré comme la maîtrise que possède une personne sur ce qu'elle fait ; une maîtrise de soi, une domination que l'on exerce sur soi-même. C'est aussi, une action, un fait de se dominer, de maîtriser et vérifier ses propres réactions.

La vérification, au sens de Coppé (1995), est : «...Argument avancé ou action mise en œuvre par l'étudiant pour limiter l'incertitude sur le résultat (...) [13]. Une vérification a pour conséquence soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement déboucher sur une phase de rectification » [13].

C'est l'idée d'un véritable processus de contrôle au sens de Margolinas (1992) pour anticiper la validation [14]. Ce rôle de contrôle a été souligné par Burgermeister et Coray (2008) pour des étudiants plus âgés résolvant des problèmes de la vie courante [15].

3.2. Mobilisation des procédures et le contrôle exercé par l'étudiant : Dans la mesure où les étudiants doivent mobiliser et articuler plusieurs procédures, Artigue (1993), pour résoudre un problème, un autre défi survient ; celui qui consiste à organiser les procédures à exécuter [16]. C'est-à-dire, face à un problème, l'étudiant doit planifier sa démarche, ce qui suppose, selon Schoenfeld (1994), une fonction de contrôle qui contribue de façon déterminante à l'autorégulation cognitive nécessaire à la bonne réussite de toute tâche [17].

Dans ses travaux, Vergnaud (1983) précise qu'il est devenu primordial de distinguer des classes de problèmes qui se différencient en fonction de la relation sémantique impliquée [18]. La résolution de problèmes exige donc, une combinaison de plusieurs procédures et ceci sans qu'il existe un schéma canonique de résolution.

3.3. Caractérisation des composantes du contrôle : Selon Saboya (2010), l'activité de contrôle est associée à un processus qui se développe, se construit à long terme chez l'étudiant [9]. Le contrôle se traduit par :

- Une réflexion de la part de l'étudiant, sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution du problème.
- La capacité à prendre des décisions de façon réfléchie et rationnelle.
- Une prise de distance par rapport à la résolution.
- Le recours aux fondements sur lesquels on s'appuie pour valider.
- L'utilisation de métaconnaissances.

Dans la figure 1 ci-dessous, Dufour and Jeannotte (2013) cité de Saboya (2010), caractérise le contrôle exercé par les étudiants lors de la résolution d'un problème selon, huit composantes qui sont inter reliées [10, 9].

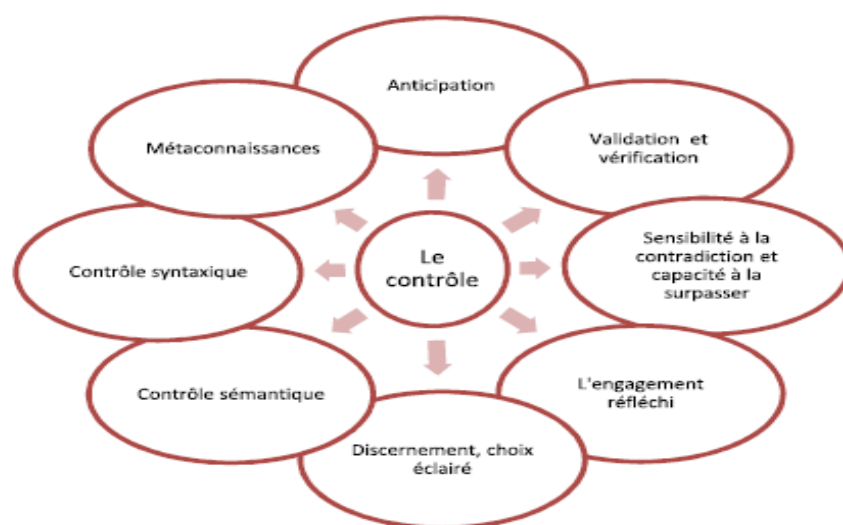


Figure 1 : Les composantes du contrôle, Saboya (2010) [9].

Nous avons exploité le statut de chacune de ces composantes, en tentons de mettre en place un dispositif qui permet de discerner une activité de contrôle chez des étudiants d'université lors de la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes.

Anticipation : Analyse préalable des propriétés que devra posséder le résultat. Il s'agit de poser une condition de validité du résultat avant de le connaître. L'anticipation amène une vérification du résultat [19].

Vérification : La vérification prend place après l'exécution lors de la découverte d'incohérences avec d'autres informations données dans le problème ou le sentiment d'avoir épuisé l'espace de recherche arrivant ainsi à une impasse. La vérification se traduit par une remise en cause de la représentation de la tâche (abandon de la représentation construite et construction d'une autre représentation) [20]. L'étudiant se pose la question sur le caractère de la véracité du résultat. La vérification implique un retour sur ce que l'étudiant a produit [19].

Validation : La validation a recours à certains fondements sur lesquels on s'appuie pour dire qu'un énoncé est valide ou non, et qui permet de détecter certains erreurs [21].

Engagement réfléchi : Une prise de distance, un arrêt devant la tâche avant de résoudre, une réflexion sur l'action [22]. Elle renvoie à voir la pertinence et la provenance de règles [23].

Discernement / Choix éclairé : Capacité de voir différentes stratégies pour résoudre le problème. Capacité de faire un choix pertinent d'une stratégie appropriée, efficace, peu coûteuse en temps en ayant préalablement écarté les stratégies qui sont inappropriées [24].

Recours à des métaconnaissances : Les métaconnaissances se situent à un niveau qui n'est pas le même que celui des connaissances mathématiques (définitions, théorèmes, propriétés) mais davantage celui d'une réflexion sur ces connaissances. Elles expriment un savoir sur la pertinence, l'efficacité d'une notion dans un contexte donné, sur les moyens de gérer cette notion.

Perception des erreurs / Sensibilité à la contradiction : Capacité de dépasser la contradiction. La sensibilité à la contradiction est liée à une réflexion rétroactive sur la tâche qui repose sur une négation des faits observés (et qui proviennent d'une affirmation) et est issue d'une anticipation déçue. Une construction de négations non données au début conduit au dépassement de telles contradictions [25].

Syntaxique : C'est l'analyse des relations entre les objets mathématiques. La syntaxe d'un langage formel donne les règles de formation et de transformations des énoncés du langage considéré ; elle permet de reconnaître si un énoncé est bien formé ou non et si le passage d'un énoncé à un autre dans une démonstration de théorème, etc.

Sémantique : c'est l'interprétation du problème selon Vergnaud (1990), une interprétation liée à la représentation que l'élève se fait du problème [26].

4. METHODOLOGIE DE TRAVAIL

Pour bien illustrer la conduite des étudiants dans le processus de résolution d'un problème d'optimisation, nous avons travaillé avec les étudiants interrogés sur un exemple de problème visant l'analyse du comportement du producteur dont l'objectif est de bâtir la théorie de l'offre. Ceci, dans le but de les préparer à distinguer les composantes de contrôle susceptibles d'expliquer les stratégies envisagées dans le processus de résolution de ce type de problème. Dans un

deuxième temps, nous avons expérimenté un autre problème pour faire l'émergence de l'analyse du comportement du consommateur qui aboutit à la construction de la théorie de la demande. Nous présentons ici les participants, l'instrumentation de mesure, le déroulement ainsi que la méthode d'analyse des données.

4.1. Les participants

Les participants à cette étude sont des étudiants de la première année sciences économiques et gestion à la faculté des sciences juridiques, économiques et sociales, Université Hassan1 de Settat. Dans un premier temps, nous avons interrogé toute une section constituée de 160 étudiants. Ensuite, nous avons effectué une analyse, sous l'angle des composantes de contrôle, des productions de 20 étudiants retenus dans l'analyse, sont ceux qu'ont obtenus les scores les plus élevés, après la correction de l'épreuve administrée à cette fin.

Les étudiants de cette section ont bénéficié d'une formation en micro économétrie et en analyse mathématique dans le cadre d'un semestre. Ce sont deux modules de 50 heures chacun, dans lesquels les étudiants ont appris les connaissances exigibles aux applications économiques.

4.2. Instrumentation et déroulement

Afin de repérer les indicateurs du contrôle exercé par les étudiants sur leur propre activité de résolution. Nous avons procédé par deux étapes.

La première étape consiste à amener les étudiants, à s'approprier la démarche de résolution de problèmes. Les étudiants interrogés dans cette étude ont étudié dans le cours les fonctions de deux variables et ses applications. À savoir : l'étude des extremums d'une fonction numérique d'une seule variable et de deux variables, l'optimisation sans contrainte et avec contrainte. Nous illustrons ici, un exemple de problème qui a été traité avec ses étudiants en classe pour les initiés à faire émerger des capacités autorégulatrices de contrôle chez eux.

Le problème « la firme productive » est le suivant :

Une firme produit des appareils dans deux usines différentes. Les coûts totaux de production pour les deux usines sont respectivement :

$CT_1 = 200 + 6q_1 + 0,03q_1^2$ et $CT_2 = 150 + 10q_2 + 0,02q_2^2$ où q_1 et q_2 représentent le nombre d'appareils produits dans chaque usine. La firme s'est engagée à livrer 100 appareils à une entreprise. Les frais de transport par appareil sont de quatre dirhams pour les livraisons à partir de la première usine et de deux dirhams pour les livraisons à partir de la seconde usine. Les frais de transport sont supportés par la firme productive.

Afin de minimiser le coût total de production y compris le coût de transport, la firme veut savoir le nombre d'appareils que doit produire chaque usine.

Dans ce problème les étudiants sont sollicités de trouver le nombre d'appareils que doit produire la firme dans chaque usine afin de minimiser le coût total de production y compris le coût de transport. Il s'agit alors, de minimiser le coût total de production qui est :

$$CT = 0,03q_1^2 + 0,02q_2^2 + 6q_1 + 10q_2 + 350$$

Et cela sous la contrainte de livrer 100 appareils au total, c'est-à-dire $q_1 + q_2 = 100$.

Dans la phase de mise en œuvre en classe, nous avons résolu ce problème avec deux méthodes différentes.

La première méthode est dite de substitution

Elle consiste à chercher tous les couples (q_1, q_2) du domaine de définition de la fonction CT tel que la contrainte $CT(q_1, q_2) = 0$, celui pour lequel CT (q_1, q_2) est un extremum.

Dans la contrainte $CT(q_1, q_2) = 0$, on peut exprimer :

- La variable q_1 en fonction de q_2 ; on obtient $q_1 = f(q_2)$.
- La variable q_2 en fonction de q_1 ; on obtient $q_2 = f(q_1)$.

Dans les deux cas, f est une fonction d'une seule variable. Les valeurs CT (q_1, q_2) deviennent alors $g(q_1) = CT(f(q_2), q_2)$ dans le premier cas et $g(q_1) = CT(q_1, f(q_1))$ dans le deuxième cas.

Il faut alors chercher les extremums de g qui est une fonction d'une variable.

La seconde méthode est dite de Lagrange

Cette méthode ne fournit que des candidats. Elle donne une liste de couples (q'_1, q'_2) et s'il existe un extremum, il doit être dans cette liste. Mais il n'y aura pas d'extremum, dans le cas où la liste des candidats serait vide.

À partir de la fonction d'utilité $CT(q_1, q_2)$ et de la contrainte $C(q_1, q_2) = 0$. On construit, une fonction de trois variables L appelée un lagrangien : $L(q_1, q_2, \lambda) = CT(q_1, q_2) + \lambda C(q_1, q_2)$, où λ multiplicateur de Lagrange est une inconnue.

On calcule les trois dérivées partielles premières :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1}(q_1, q_2, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q_2}(q_1, q_2, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(q_1, q_2, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Notons que la troisième équation $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(q_1, q_2, \lambda) = 0$ n'est autre que la contrainte.

Éliminant λ des deux premières équations et en résolvant avec la troisième équation, on obtient les points critiques. Ensuite, on calcule les dérivées partielles secondes pour vérifier s'il s'agit d'un extremum.

Dans la deuxième étape, au terme du premier semestre de l'année universitaire 2016/2017 et dans le cadre d'une expérimentation, nous avons interrogé tous les étudiants de la section à une épreuve d'une heure pour résoudre Le problème qui traite le « comportement du consommateur ». Nous avons choisi dans ce travail, de traiter en particulier, ce problème qui porte sur l'optimisation avec contrainte des fonctions de deux variables. Ce qui fera intervenir des connaissances fondamentales en calcul différentiel (dérivées partielles, développements limités, extremums, etc.).

Le problème proposé « comportement du consommateur » est le suivant :

Un consommateur dépense son revenu de 48 dirhams pour l'achat de deux biens X et Y (avec x et y : respectivement, le nombre d'unités des biens X et Y).

Les prix de x et de y sont respectivement deux dirhams et trois dirhams. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par la formule : $U(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy$.

Combien d'unités du bien x et du bien y doit-il consommer pour maximiser son utilité ? [27].

Ce problème répond, notamment, aux attentes fondamentales des applications mathématiques, pour la résolution de problèmes à caractère économique et faisant appel à plusieurs composantes de l'activité de contrôle.

Généralement, le problème du « comportement du consommateur » ainsi proposé est équivalent à celui du « la firme productive » qui a été expérimenté en classe avec ces étudiants.

4.3. Méthodes d'analyse des données

Le problème proposé (comportement du consommateur) est analysé selon le cadre conceptuel de l'activité de contrôle développé par Saboya (2010), et Dufour and Jeannotte (2013) [9, 10]. Cette analyse a fait suite à celle de la firme productive qui a été déjà traité en classe, dans une séance de travaux dirigés.

Nous avons effectué une analyse, sous l'angle des composantes de contrôle, des productions de 20 étudiants qui ont obtenu les meilleures notes à cette épreuve.

À partir des enseignements sollicités de l'analyse à posteriori de ce problème 'la firme productive' : Nous pensons qu'il ne suffit pas seulement de laisser du temps aux étudiants pour qu'une activité de contrôle se développe. Le contrôle ne peut être transmis par un enseignement de méthodes, mais il devrait plutôt se construire. Dans le même sens, Oliveira et al., (2007), considèrent que le développement du contrôle ne résulte pas d'un apprentissage de méthodes, mais plutôt d'une construction, d'un développement de stratégies par les étudiants [28]. Nous avons mis de l'avant l'importance de donner les moyens aux étudiants d'acquérir des stratégies de contrôle propre à chacun, plutôt que de les enseigner.

Nous avons tiré profit de l'expérience faite et jugé pertinent que l'élaboration du problème qui nécessite de rendre vitale des allers- retours, des temps d'essais, et des prises de décision. C'est dans ce sens que, dans la construction de la situation du (comportement du consommateur), nous avons réfléchi sur un problème susceptible de développer une activité de contrôle et sur l'aménagement de ce problème par la suite.

Par cette analyse, nous incitons d'observer, sous l'angle des composantes de contrôle, comment les étudiants décident de résoudre ce problème et surtout identifier les stratégies de résolution qui fait l'arrimage entre les connaissances en économétrie et l'outil mathématique.

5. ANALYSE DU PROBLEME « COMPORTEMENT DU CONSOMMATEUR » SOUS L'ANGLE DES COMPOSANTES DE CONTROLE

La confrontation entre l'analyse théorique et l'analyse a priori du problème « comportement du consommateur » fait ressortir plusieurs procédures de résolution en lien avec les composantes du contrôle. Le tableau 1 ci-dessous illustre des pistes de solution possible en regard des types de composantes de contrôle que les étudiants peuvent utiliser.

Tableau 1 : Les procédures requises en regard des composantes de contrôle que les étudiants peuvent mobiliser.

Les procédures de résolution « comportement du consommateur »	Analyse préalable du contrôle	Composantes du contrôle
N1 : Choix de la méthode utilisée (la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou la méthode de substitution).	L'anticipation fait référent à l'aptitude d'avoir a priori une pensée du résultat considéré et de sa nature. Ici, la méthode de substitution présente des limites et elle n'est pas toujours réalisable.	Anticipation
	Il se traduit par une capacité à choisir parmi différentes écritures et/ou différentes stratégies celle qui est la plus appropriée, la plus efficace et la moins coûteuse en temps en ayant préalablement écarté celles qui sont inappropriées.	Le discernement choix éclairé
N2 : Former une fonction auxiliaire appelée un lagrangien : $L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda c(x, y)$ Où λ multiplicateur de Lagrange est une inconnue ;	Manipuler la fonction objectif $U(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy$ et la contrainte $2x + 3y = 48$ ou $2x + 3y - 48 = 0$	Contrôle syntaxique
	Une tâche qui dépasse l'aspect calculatoire et qui mise sur la compréhension, sur le sens (lorsqu'il s'agit de maximiser, en utilise la fonction suivante : $L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda c(x, y)$ et lorsqu'il s'agit de minimiser, en utilise : $L(x, y, \lambda) = U(x, y) - \lambda c(x, y)$).	Engagement réfléchit et un contrôle sémantique
N3 : Identifier les points critiques (résoudre le système de trois équations à trois inconnus formés par les dérivées partielles premières de L par rapport à x, y et λ)	Calculer les dérivées partielles premières, résoudre le système de trois équations à trois inconnues et chercher les points critiques.	Contrôle syntaxique
	La vérification sollicite un retour à la tâche, à la question (les valeurs des quantités des biens x et y vérifient l'équation de la contrainte)	Vérification et validation
	Interprétation de la réponse par un retour au problème (la validation est sollicitée par la nature de la question qui doit axer sur le raisonnement et la réflexion).	
	À partir du point critique $(\frac{336}{29}, \frac{240}{29})$, l'étudiant peut anticiper le signe des deux inconnues (puisque'il s'agit d'un bien qui est toujours positif)	Anticipation
	L'anticipation est reliée ici à une sensibilité à la contradiction (l'anticipation amène chez l'étudiant une perception de ses erreurs dues à la différence entre le résultat anticipé et celui obtenu)	Sensibilité à la contradiction
N4 : Faire le lien entre la notion du développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de 2 variables et la définition du concept extremum	Calculer les dérivées partielles secondes afin de déterminer la nature de ce point critique.	Contrôle syntaxique
	Vérifié à partir du signe de $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\frac{336}{29}, \frac{240}{29})$ s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum	Vérification et validation
	Faire le lien entre la notion du développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de 2 variables et la définition du concept extremum d'une fonction. Pourquoi aurai-je besoin du développement limité ?	Recours à des métaconnaissances

N5 : Faire le lien entre les dérivées partielles secondes, notion d'extremum (maximum ou minimum) et l'expression Δ .	Faire le lien entre différentes représentations d'un même registre ou de plusieurs, choix des relations	Recours aux métacognitions
	La contradiction peut provenir d'un raisonnement qui n'est pas valide où l'étudiant est sensible à la contradiction alors que le raisonnement est bon (le bien ne pourra jamais être un nombre négatif et les valeurs trouvées doivent vérifier la contrainte)	Perception des erreurs /sensibilité à la contradiction. Capacité de dépasser la contradiction.
	Reliée aux manipulations, la capacité de gérer les règles de transformation (identifier les points critiques en manipulant les dérivées partielles premières afin de résoudre le système de trois équations à trois inconnus et calculer Δ)	Contrôle Syntaxique
	La capacité à ne pas se détacher de la signification (le sens du concept extremum et son opérationnalisation). Le signe négatif de Δ entraîne l'existence d'un extremum.	Contrôle Sémantique

Dans de nombreuses applications pratiques d'optimisation, le problème est de maximiser ou minimiser une fonction donnée assujettie à certaines conditions ou contraintes sur les variables impliquées. La méthode étudiée, ci-après, est applicable à n'importe quel nombre de variables et de contraintes.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est employée pour obtenir un maximum ou un minimum d'une fonction soumise à des contraintes d'égalité.

Présentons une analyse de la situation « comportement du consommateur. Il s'agit de proposer une solution à ce problème, suivant une composition qui n'est pas unique à choisir, dans le but de mettre en relief, comment les indicateurs possibles d'une activité de contrôle sont identifiés dans une production de l'étudiant. La démarche de résolution proposée est la même que celle évoqué auparavant et qui concerne la situation de « la firme productive ».

L'étudiant, dans sa démarche de résolution, pourrait ne pas être exigé d'adopter ou de suivre linéairement le même cheminement de résolution présenté. Il pourra même ajouter plus de détails dans les étapes à suivre pour réussir la tâche avec pertinence. De façon ordinaire, pour résoudre ce problème, l'étudiant doit être en mesure de modéliser les problèmes économiques des minima et maxima sous contraintes.

Dans cet exemple, si le consommateur vise la maximisation de son utilité sous contrainte de son budget, l'étudiant doit déterminer la quantité x du bien X et la quantité y du bien Y qui procure plus d'utilité. Dans la mise en œuvre ; et à partir de la fonction d'utilité $U(x, y)$ et de la contrainte $c(x, y) = 0$. L'étudiant doit être en mesure de :

- Former une fonction auxiliaire appelée un lagrangien : $L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda c(x, y)$; où λ multiplicateur de Lagrange est une inconnue.
- Identifier les points critiques (résoudre le système de trois équations à trois inconnus formés par les dérivées partielles premières de L par rapport à x , y et λ).
- Faire le lien entre la notion du développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de 2 variables et la définition du concept extremum.
- Faire le lien entre les dérivées partielles secondes et l'expression Δ^1 .

Nous supposons qu'un étudiant qu'aurait bien maîtrisé ces procédures, par son contrôle exercé, il serait en mesure de faire une combinaison entre les différentes procédures intermédiaires non précisées pour maximiser la fonction d'utilité. Dans ce genre de résolutions proposées, les étudiants peuvent amorcer par un contrôle de discernement, choix éclairé. Ceci se traduit par une capacité de l'étudiant à choisir parmi les différentes stratégies de résolution évoquées. Celle qui est la plus appropriée, la plus efficace et la moins couteuse en matière de temps.

En effet, dans la compréhension de la situation à travers ce qu'il explicite. L'étudiant doit modéliser le problème à des fins de résolution et il sélectionne les ressources économiques et mathématiques essentielles à mobiliser en faisant un retour réflexif au contexte du problème. Dans le sens d'interpréter correctement cette situation, l'étudiant dégage la perception de sa production en lien avec la visée du problème et valide ce qui est avancé dans les transformations. Il choisit la méthode convenable et renvoie à ce qu'il a fait, en allant plus loin de sorte qu'il explicite la solution jusqu'au bout. Cela sollicite un contrôle d'anticipation suivi d'une composante de vérification et de validation, qui se manifeste par le choix de

¹ $\Delta = b^2 - ac$ (voir page 9)

la méthode utilisée (la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou la méthode de substitution). En effet, la méthode de substitution présente des limites et elle n'est pas toujours réalisable.

On peut s'attendre à ce que l'étudiant réécrive la fonction auxiliaire :

$L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda c(x, y)$; un engagement réfléchi peut s'exprimer par un retour aux fondements et à la recherche du sens pour savoir d'où provient les conventions (lorsqu'il s'agit de maximiser, on utilise la fonction suivante : $L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda c(x, y)$ et lorsqu'il s'agit de minimiser, on utilise : $L(x, y, \lambda) = U(x, y) - \lambda c(x, y)$). Ceci demande un certain contrôle sémantique, puisque l'étudiant doit choisir dans la fonction auxiliaire, entre le signe $+$ λ pour maximiser ou $-$ λ pour minimiser.

Ensuite, il aura besoin d'un contrôle syntaxique pour identifier les points critiques. En manipulant les dérivées partielles premières et résolvant le système de trois équations à trois inconnus, dont la valeur de λ ne présente pas d'intérêt et elle n'est donc pas indispensable de la chercher.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = -2x + 2y + 2\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = -4x + 2x + 3\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 2x + 3y - 48 \end{cases}$$

Pour trouver un extremum, on annule ces trois dérivées partielles :

$$\begin{aligned} -2x + 2y + 2\lambda &= 0 \\ -4x + 2x + 3\lambda &= 0 \\ 2x + 3y - 48 &= 0 \end{aligned}$$

Donc, si l'étudiant dégage les points critiques $(x_0, y_0) = (\frac{336}{29}, \frac{240}{29})$. Il peut anticiper le signe des deux inconnues (puisque l'on s'agit d'une quantité de bien qui est toujours positive); ce qui relève de la sensibilité à la contradiction et la capacité à la surpasser. Ces points critiques doivent satisfaire l'équation de la contrainte ($2x + 3y - 48 = 0$).

Ce qu'exige l'étudiant d'avoir un contrôle de vérification issue d'une anticipation, elle-même, provient de la nature du nombre obtenu. L'anticipation est reliée ici à une sensibilité à la contradiction dans le cas où l'anticipation amènerait chez l'étudiant une perception de ses erreurs dues à la différence entre le résultat anticipé et celui obtenu.

Mais il reste encore à déterminer s'il s'agit effectivement d'un extremum. Ceci demande un recours aux métaconnaissances (pourquoi aurai-je besoin du développement limité).

En effet, soit L la fonction admettant un point critique (x_0, y_0) des dérivées partielles secondes continues ; $dL(x_0, y_0) = 0$. En notant que la troisième équation $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0$ n'est autre que l'équation de la contrainte ($2x + 3y - 48 = 0$).

Le développement limité de L en (x_0, y_0) permet d'apporter des précisions sur la nature du point (x_0, y_0) .

$$L(x_0 + h, y_0 + k) - L(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left[h^2 \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right] + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$

Pour h et k proche de 0, le signe de $L(x_0 + h, y_0 + k) - L(x_0, y_0)$ étant de celui de l'expression : $P(h, k) = h^2 \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0)$

On pose : $a = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $c = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ et $\Delta = b^2 - ac$

Si $\Delta < 0$, L admet un extremum en (x_0, y_0) (un maximum si $a < 0$ ou un minimum si $a > 0$).

Si $\Delta > 0$, il n'y a pas d'extremum en (x_0, y_0) .

Si $\Delta = 0$, la nature du point (x_0, y_0) est indéterminée.

Ayant deviné le point critique $(\frac{336}{29}, \frac{240}{29})$, l'étudiant doit être en mesure de calculer les dérivées partielles secondaires (il s'agit d'un contrôle syntaxique) pour vérifier à partir du signe de $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\frac{336}{29}, \frac{240}{29})$ s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum (contrôle de vérification et de validation). Alors, l'étudiant peut trouver $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}) = -2$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}) = -4$ et $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(\frac{336}{29}, \frac{240}{29}) = 2$.

Ensuite, par des manipulations et la capacité de gérer les règles de transformation (un contrôle syntaxique), l'étudiant peut poser

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29} \right) \right)^2 - \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29} \right) \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{336}{29}, \frac{240}{29} \right) = -4.$$

Par la présence d'un contrôle de métaconnaissances, l'étudiant doit être en mesure de faire le rapport entre la notion du développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de 2 variables et la définition du concept extremum d'une fonction. Le signe négatif de l'expression de Δ entraîne l'existence d'un extremum (contrôle sémantique) et par un contrôle de validation qui permet de développer une sensibilité aux erreurs (sensibilité à la contradiction).

Finalement, même que cette situation était nouvelle, elle peut demander à l'étudiant d'avoir un grand contrôle syntaxique. Mais ce dernier ne sera pas suffisant pour réussir la tâche, parce que les manipulations des règles, l'application des procédures de calculs, l'utilisation des algorithmes et des techniques ne sont que des outils.

Cette phase de résolution demande, de la part de l'étudiant, d'avoir un retour au sens du problème. Ce qui provoque un appel au contrôle sémantique des concepts mis en jeu (DL, extremums, ..) et plusieurs métaconnaissances (faire le lien entre différentes représentations d'un même registre ou de plusieurs, choix des relations), afin de parvenir à accomplir la résolution du problème.

6. INTERPRETATIONS DES PRODUCTIONS DES ETUDIANTS ET LES ENSEIGNEMENTS SOLLICITES DE L'ACTIVITE DU CONTROLE

À partir des solutions des étudiants interrogés, on dégage les composantes de contrôle relevant de l'anticipation, vérification/ validation, un engagement réfléchi, un discernement, recours à des métaconnaissances, la sensibilité à la contradiction ainsi que le contrôle syntaxique et sémantique.

Pour recenser les différentes composantes de contrôle. Nous avons procédé à une codification des actions mathématiques manifestées dans les solutions des étudiants, en attribuant à chaque action un code (2, 1 ou 0), de la manière suivante :

2 : signifie que l'on a observé des indicateurs que l'étudiant a exercé une action mathématique liée à cette composante de contrôle (EAMC).

1 : signifie que l'action menée par l'étudiant en lien avec la composante de contrôle comportait certaines erreurs (EAMCE).

0 : absence d'action mathématique liée à cette composante de contrôle (AAMC).

Tableau 2 : Synthétise l'analyse des composantes du contrôle observé dans les productions des 20 étudiants sélectionnés.

Niveaux	Composantes du contrôle	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	E 8	E 9	E 10	E 11	E 12	E 13	E 14	E 15	E 16	E 17	E 18	E 19	E 20	Frq.
N1	Anticipation	0	0	0	2	2	2	2	0	2	0	2	2	1	2	1	2	0	1	2	2	12/2 3/1 6/0
	Le discernement choix éclairé	0	0	0	1	2	2	2	0	2	0	2	2	1	2	1	2	0	1	2	2	10/2 4/1 6/0
N2	Contrôle syntaxique	0	0	0	1	2	2	2	0	2	0	2	2	1	2	0	2	0	1	1	2	9/2 4/1 7/0
	Engagement réfléchi et un contrôle sémantique	0	0	0	1	2	2	2	0	2	0	1	2	2	1	0	2	0	0	1	2	8/2 4/1 8/0
N3	Contrôle syntaxique	0	0	0	2	2	2	1	0	2	0	2	1	2	2	1	2	0	0	0	2	9/2 3/1 8/0
	Vérification	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0/2 8/1 12/0
	Validation	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0/2 2/1 18/0
	Anticipation	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0/2 5/1 15/0
	Sensibilité à la contradiction	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0/2 1/1

N4	Contrôle syntaxique	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	0	1	1	0	0	0	0	19/0
	Vérification et validation	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	0	0	0	0	0	1/2 4/1 15/0
	Recours à des métaconnaissances	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1/2 2/1 17/0
N5	Recours aux métaconnaissances	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0/2 2/1 18/0
	Perception des erreurs /sensibilité à la contradiction. Capacité de dépasser la contradiction.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0/2 0/1 20/0
	Contrôle Syntaxique	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0/2 0/1 20/0
	Contrôle Sémantique	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0/2 0/1 20/0

Pour analyser les données issues des résolutions des étudiants, nous avons conduit notre vision selon cinq niveaux de procédures de résolutions qui sont réparties en 16 actions. Chaque action se traduit par une liaison d'attache avec au moins une composante du contrôle, mis en évidence par la grille (Tableau 2).

Au premier niveau (N1), les considérations seront orientées sur le choix de la méthode utilisée et vers l'aptitude d'avoir a priori une pensée du résultat considéré. Il se traduit par une capacité à choisir parmi différentes écritures et/ou différentes stratégies celle qui est la plus appropriée, la plus efficace et la moins coûteuse en matière de temps, en ayant préalablement écarté celles qui sont inappropriées. En effet, parmi les 20 résolutions qui sont analysées, 12 étudiants ont exercé une action de contrôle relevant de la composante d'anticipation. Trois étudiants ont commis des erreurs dans l'exécution de cette action de contrôle. Tandis que, 6 étudiants n'ont exercé aucune action de contrôle. Quant à la composante de discernement choix éclairé, 10 étudiants ont exercé une action relative à cette composante de contrôle, 4 étudiants l'exercent avec erreur et 6 étudiants n'ont exercé aucune activité de contrôle.

Il en sera de même au deuxième niveau (N2), où nous dirigerons notre attention sur la capacité de l'étudiant à construire une fonction auxiliaire appelée un lagrangien. Il doit être en mesure de manipuler la fonction objective en dépassant l'aspect calculatoire de la tâche par une mise en compréhension du sens accordé à la consigne du problème. Ceci suppose en premier lieu la possession d'un contrôle syntaxique. En résultat, 9 étudiants ont exercé une action de contrôle relative à la composante syntaxique, 4 étudiants l'entraînent avec erreur et 6 étudiants n'ont montré aucune activité de contrôle relative à cette composante. En deuxième lieu un engagement réfléchi, où 8 étudiants ont exercé une action de contrôle relative à cette composante. Quatre étudiants ont commis des erreurs dans l'exécution de cette action de contrôle. Tandis que, 8 étudiants n'ont exercé aucune action de contrôle.

En troisième niveau (N3), dans lequel l'étudiant est appelé à identifier les points critiques (résoudre le système de trois équations à trois inconnus formés par les dérivées partielles premières de L par rapport à x , y et λ). En effet, par un calcul des dérivées partielles premières, une résolution du système de trois équations à trois inconnues et la recherche des points critiques. L'étudiant exerce un contrôle syntaxique (9 étudiants en EAMC, 3 étudiants en EAMCE et 8 étudiants en AAMC). Dans le niveau (N3), les étudiants n'ont pas exercé de composante de contrôle dans quatre autres actions mathématiques. En effet, il y eut un manque de vérification qui sollicite un retour à la tâche et à la question (les valeurs des quantités des biens x et y vérifient l'équation de la contrainte). Il y a aussi une absence de validation qui est sollicitée par la nature de la question qui doit axer sur le raisonnement et la réflexion. Les résultats ont montré aussi une défection d'anticipation. Puisqu'à partir du point critique (336/29, 240/29), l'étudiant peut anticiper le signe des deux inconnues (car il s'agit d'une quantité de bien qui est toujours positive). Cette composante d'anticipation est reliée ici à une sensibilité à la contradiction (l'anticipation amène chez l'étudiant une perception de ses erreurs dues à la différence entre le résultat anticipé et celui obtenu).

Quant au niveau quatre (N4), il consiste à créer un lien entre la notion du développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de deux variables et la définition du concept extremum. Ainsi que dans le niveau cinq (N5) qui demande d'opérer le lien entre les dérivées partielles secondes, notion d'extremum (maximum ou minimum) et l'expression Δ . Ces deux derniers niveaux, bien qu'ils demandent plusieurs métaconnaissances et de contrôle sémantique, ils ne sont pas pris en considération par la totalité des 20 étudiants interrogés.

Tableau 3 : Résume la mesure des niveaux de développement des composantes du contrôle observé dans les productions des étudiants. Selon les trois angles d'attaque : EAMC, EAMCE et AAMC.

	AAMC	EAMCE	EAMC	TOTAL
Anticipation	4,4% (7)	1,9% (3)	6,3% (10)	12,5% (20)
Vérification / Validation	8,8% (14)	3,1% (5)	0,6% (1)	12,5% (20)
Engagement réfléchi	10,6% (17)	0,6% (1)	1,3% (2)	12,5% (20)
Discernement / choix éclairé	11,3% (18)	0,0% (0)	1,3% (2)	12,5% (20)
Recours à des métaconnaissances	9,4% (15)	2,5% (4)	0,6% (1)	12,5% (20)
Sensibilité à la contradiction	10,6% (17)	1,3% (2)	0,6% (1)	12,5% (20)
Syntaxique	6,3% (10)	5,0% (8)	1,3% (2)	12,5% (20)
Sémantique	10,6% (17)	1,9% (3)	0,0% (0)	12,5% (20)
Ensemble	71,9% (115)	16,3% (26)	11,9% (19)	100% (160)

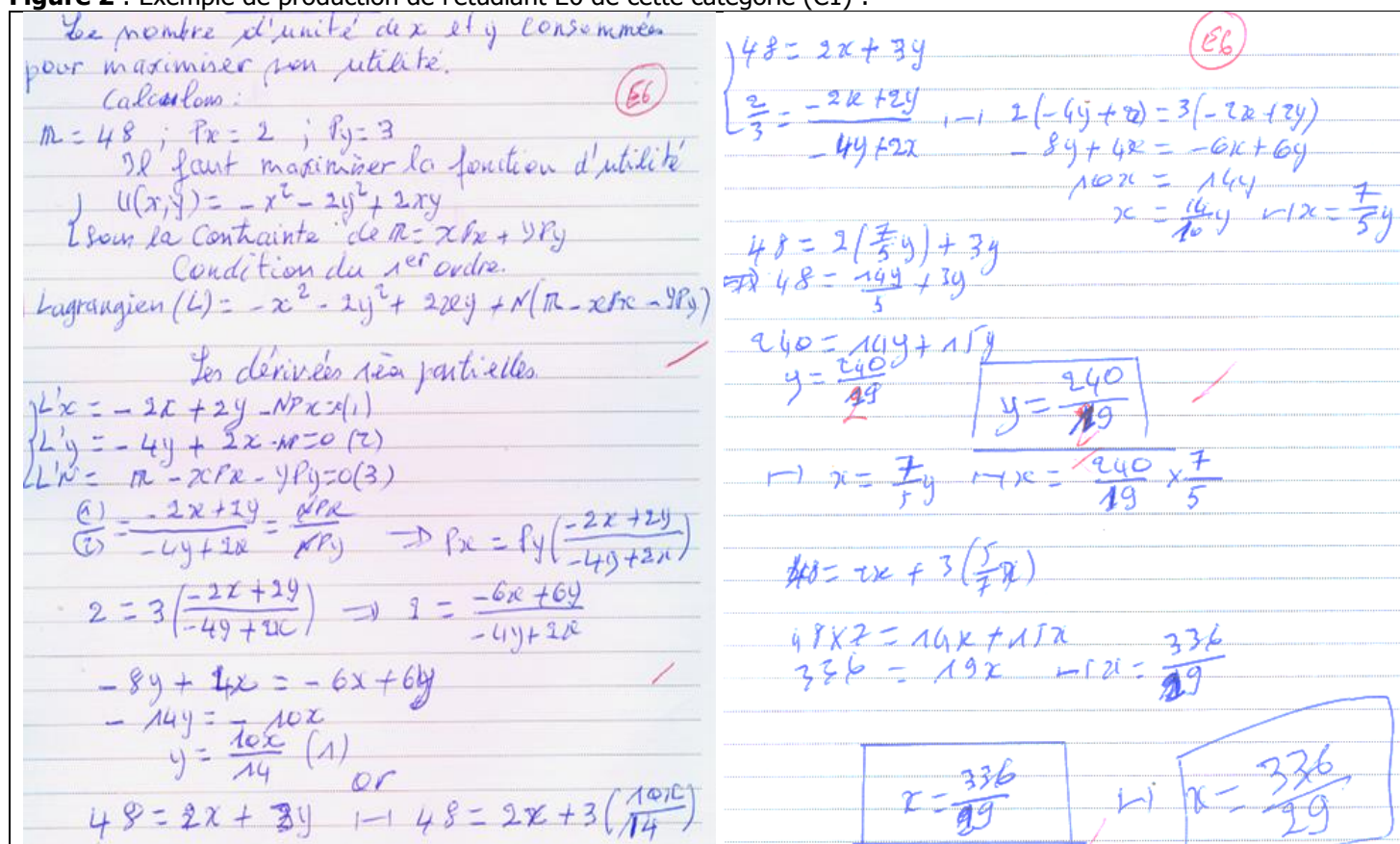
Ce tableau 3 montre que certains étudiants changent de procédures selon la consigne de travail et dans plusieurs cas, les procédures d'anticipation et syntaxiques sont fréquents. Néanmoins, l'articulation de toutes les composantes de contrôle est presque absente.

Les résultats ont dévoilé que 72% des étudiants interrogés n'exercent aucune activité de contrôle, 16% des étudiants ont essayé de manœuvrer une activité de contrôle, mais ils l'ont fait avec une erreur commise. Seulement, 12% des étudiants qui ont réussi à exercer, au moins une activité de contrôle.

Selon le tableau 2 ci-dessus, on peut parvenir à identifier trois catégories d'étudiants :

La première catégorie (C1): elle est formée de six étudiants qui ont exercé, chacun d'entre eux, cinq composantes de contrôle. Ces étudiants sont E5, E6, E9, E12, E16 et E20.

Figure 2 : Exemple de production de l'étudiant E6 de cette catégorie (C1) :



Le nombre d'unités de x et y consommées pour maximiser son utilité.

Calculons :

$m = 48$; $P_x = 2$; $P_y = 3$

Il faut maximiser la fonction d'utilité

$U(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy$

Sous la contrainte de $m = xP_x + yP_y$

Condition du 1^{er} ordre.

Lagrangien $(L) = -x^2 - 2y^2 + 2xy + \lambda(m - xP_x - yP_y)$

Les dérivées partielles

$L'_x = -2x + 2y - \lambda P_x = 0$

$L'_y = -4y + 2x - \lambda P_y = 0$

$L'_\lambda = m - xP_x - yP_y = 0$

(1) $-2x + 2y - \lambda P_x = 0$

(2) $-4y + 2x - \lambda P_y = 0$

$\rightarrow P_x = P_y \left(\frac{-2x + 2y}{-4y + 2x} \right)$

$2 = 3 \left(\frac{-2x + 2y}{-4y + 2x} \right) \Rightarrow 2 = \frac{-6x + 6y}{-4y + 2x}$

$-8y + 4x = -6x + 6y$

$-14y = -10x$

$y = \frac{10x}{14} \quad (1)$

or

$48 = 2x + 3y \quad | \rightarrow 48 = 2x + 3 \left(\frac{10x}{14} \right)$

$48 = 2x + 3y$

$\frac{2}{3} = \frac{-2x + 2y}{-4y + 2x} \quad | \rightarrow 2(-4y + 2x) = 3(-2x + 2y)$

$-8y + 4x = -6x + 6y$

$10x = 14y$

$x = \frac{14y}{10} \quad | \rightarrow x = \frac{7}{5}y$

$48 = 2 \left(\frac{7}{5}y \right) + 3y$

$48 = \frac{14y}{5} + 3y$

$240 = 14y + 15y$

$y = \frac{240}{29}$

$x = \frac{7}{5}y \quad | \rightarrow x = \frac{240}{29} \times \frac{7}{5}$

$x = 2x + 3 \left(\frac{7}{5}x \right)$

$48 \times 2 = 14x + 15x$

$336 = 29x \quad | \rightarrow x = \frac{336}{29}$

$x = \frac{336}{29} \quad | \rightarrow y = \frac{336}{29}$

Les étudiants de cette catégorie (C1) ont réussi à élaborer une stratégie de résolution qui comporte cinq composantes de l'activité de contrôle. Mais ils n'ont pas achevé leur propos. Ils donnent une démarche suffisamment acceptable et, pourtant ils semblent avoir des difficultés au niveau du contrôle sémantique (le sens du concept extremum et son opérationnalisation). Ainsi qu'au niveau du recours aux métaconnaissances, qui s'explique par la question : pourquoi pourrai-je utiliser le développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de deux variables au voisinage de (0, 0). Ensuite, procéder à une réflexion sur la combinaison de la notion de développement limité et la définition d'extremum ainsi que l'utilisation du signe d'un trinôme de second degré. Le tout débouche sur une connaissance plus élaborée. Ce qui pourrait

également être lié à un engagement réfléchi. Il s'explique par un manque d'une prise de distance, un arrêt devant la tâche et avoir un esprit critique avant la résolution. De même qu'un retour aux fondements pour progresser dans la résolution de la tâche, savoir d'où proviennent les conventions, les règles et les concepts en jeu.

Les étudiants de cette catégorie (C1) ont entamé un calcul pour la recherche des points critiques, ils montrent un bon contrôle syntaxique. Par contre, on remarque qu'ils ne reviennent pas à leurs suppositions de départ pour vérifier si ce point critique respecte ou non l'équation de la contrainte. Il faut noter qu'ils n'ont pas eu recours au contrôle de vérification et de validation. Ceci est dû aussi, à un effet de surprise face à un résultat qui ne correspond pas à celui attendu.

En plus, parmi les étudiants de cette catégorie, un seul étudiant (E6), (figure 2), qui a identifié les points critiques. Il a montré un bon contrôle syntaxique dans la transformation des règles et des techniques utilisées (calcul des dérivées partiel, résolution du système d'équations indépendamment de λ). Aucun étudiant ne valide explicitement ses réponses, nous pouvons donc considérer que dans cette situation, les étudiants ont des difficultés à anticiper convenablement la solution de la situation et ils ont aussi un manque de contrôle de vérification et de validation.

La deuxième catégorie (C2) : elle est formée de six étudiants qui ont exercé, chacun d'entre eux, deux à quatre composantes de contrôle. Ces étudiants sont E4, E7, E11, E13, E14 et E19.

Figure 3 : Exemple de production de l'étudiant E14 de cette catégorie (C2).

Ex 4

on $R = xP_x + yP_y$ et $R = 48$ et $x = 2$ et $y = 3$

et $U(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy$

donc $\frac{\partial L}{\partial t} = U(x, y) - \lambda(xP_x + yP_y - R)$

dc $\frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = -2x + 2y - \lambda P_x$ ①

$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = -4y + 2x - \lambda P_y$ ②

① = ② $\frac{-2x + 2y - \lambda P_x}{-4y + 2x - \lambda P_y} = 0$

$\frac{-2x + 2y}{x - 2y} = \frac{P_x}{P_y}$

on $x = 2$ et $y = 3$.

on remplace $\frac{-2 + 3}{2 - 6} \frac{P_y}{P_x} = \frac{P_x}{P_y}$

$P_x = -\frac{1}{4} P_y$

en remplace dans $R = xP_x + yP_y$

$48 = 2P_x + 3P_y$

$48 = 2x - \frac{1}{4}P_y + 3P_y$

$48 = \frac{5}{2}P_y \Rightarrow P_y = \frac{48 \times 2}{5} = \frac{96}{5} = 19,2$

et $P_x = -\frac{1}{4} \times P_y$

$P_x = -\frac{1}{4} \times \frac{96}{5} = -\frac{24}{5} = -4,8$

bien $x = 19,2$ et bien $y = -4,8$ pour consommer pour maximiser

La démarche évoquée par cet étudiant ne montre pas la présence d'indicateurs de sensibilité à la contradiction ou de la capacité à la surpasser. Par conséquent, l'étudiant E14, (figure 3), n'a pas pu réagir face à l'erreur suivante (extrait de sa solution) : (...) bien $x = 19,2$ et bien $y = -4,8$ pour consommer et pour maximiser.

Cette action dévoile un manque d'une perception face aux erreurs, une sensibilité à la contradiction et d'une incapacité à dépasser cette contradiction, puisque cette erreur n'avertit pas l'étudiant.

En effet, la quantité du bien ne pourra jamais être un nombre négatif et les valeurs trouvées doivent vérifier l'équation de la contrainte. Sa perception de cette erreur provient d'un effet de surprise face à un résultat auquel on ne s'attendait pas et qui ne correspond pas à celui attendu.

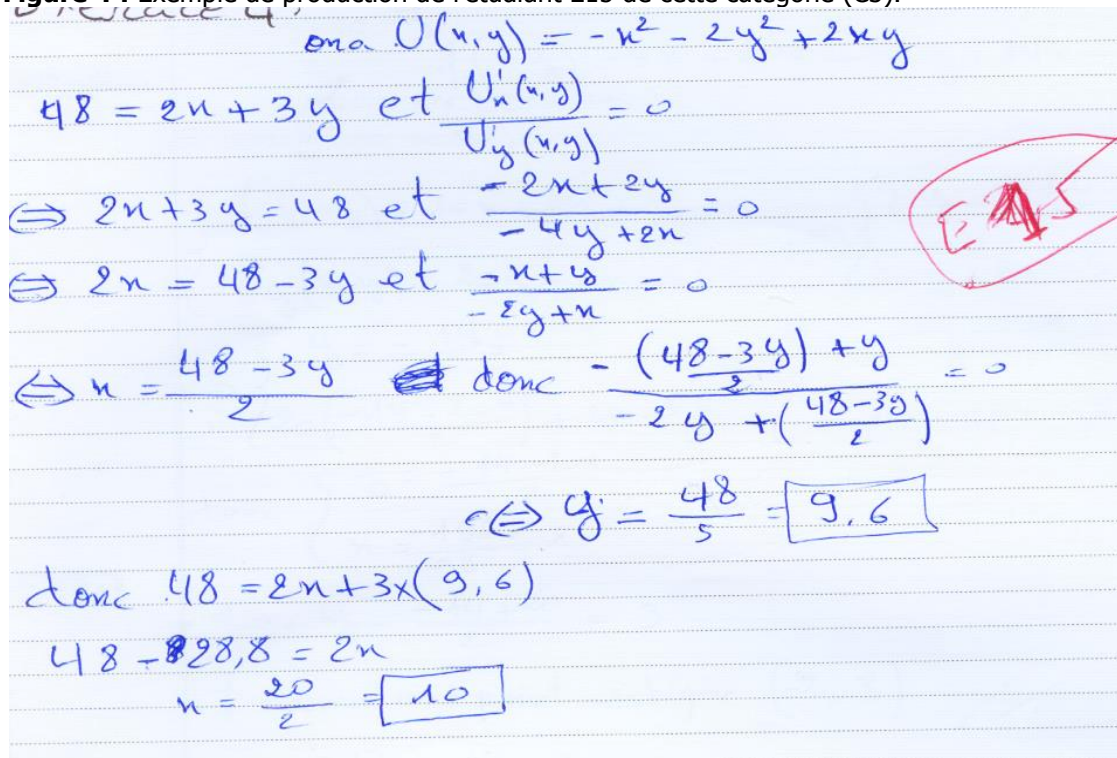
Nous pouvons noter que, la sensibilité et le dépassement de la contradiction sont difficiles à percevoir d'après les traces écrites des étudiants. Mais, si cette analyse avait été suivie d'une entrevue dans laquelle on interroge tous les étudiants. Ceci peut servir d'ancrage pour recueillir plus d'informations sur ses composantes du contrôle. Voire, à comprendre dans le cas où l'étudiant dépasserait la contradiction, comment il y arrive et dans le cas contraire à comprendre ce qui constitue un obstacle à un tel dépassement.

Les étudiants de cette catégorie ont seulement amorcé leur démarche de résolution. Ils ont commencé par se contenter de proposer une fonction auxiliaire de la méthode de lagrangien sans achever leur démarche. Un contrôle de discernement, choix éclairé, doit se traduire par une capacité de l'étudiant à choisir parmi les différentes stratégies celle la plus appropriée. Mais ses étudiants n'arrivent pas à vérifier pourquoi ils ont choisi cette méthode et non celle de substitution, qui peut être la plus efficace et la moins couteuse en matière de temps. Ce qui s'exprime par un manque de contrôle de vérification et de validation.

Les productions de cette catégorie d'étudiant montrent aussi, une insuffisance dans le contrôle d'engagement réfléchi ; c'est-à-dire une prise de distance, un arrêt devant la tâche, un esprit critique avant d'entamer la démarche effective de la résolution.

La troisième catégorie (C3) : Huit étudiants n'ont exercé aucune composante de contrôle. Ces étudiants sont E1, E2, E3, E8, E10, E15, E17 et E18.

Figure 4 : Exemple de production de l'étudiant E15 de cette catégorie (C3).



ona $U(x,y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy$

$48 = 2x + 3y$ et $\frac{U'_x(x,y)}{U'_y(x,y)} = 0$

$\Rightarrow 2x + 3y = 48$ et $\frac{-2x + 2y}{-4y + 2x} = 0$

$\Rightarrow 2x = 48 - 3y$ et $\frac{-x + y}{-2y + x} = 0$

$\Rightarrow x = \frac{48 - 3y}{2}$ donc $\frac{-(48 - 3y) + y}{-2y + (48 - 3y)} = 0$

$\Rightarrow y = \frac{48}{5} = 9.6$

donc $48 = 2x + 3 \times (9.6)$

$48 - 28.8 = 2x$

$x = \frac{20}{2} = 10$

Les productions de cette catégorie (C3) d'étudiants ne reflètent pas une véritable maîtrise de la démarche de résolution à employer. En effet, ils ne sont pas réussis à commencer la résolution de cette situation ; signe d'une absence totale de toutes les composantes du contrôle. Lors de l'exercice de cette action mathématique, l'étudiant E15, (figure 4), a tenté de résoudre la fonction d'utilité, mais sa production ne laisse apparaître aucun indicateur de contrôle. Il a montré une confusion entre les deux méthodes de résolution, en dégageant l'équation de la contrainte et le rapport nul des deux dérivées partielles de la fonction utilité (à noter ici que le calcul « syntaxique » des dérivées partielles de l'utilité par rapport à x et y est correct).

Somme toute, nous avons remarqué qu'au cours de l'analyse des productions des étudiants, elle était plus remarquable d'évaluer le contrôle sémantique et des métaconnaissances. En effet, la demande était tellement grande au niveau du sens et des métaconnaissances que le contrôle syntaxique qui ne sert qu'outil, Kouki (2007) [29]. Nous avons remarqué aussi, un manque de contrôle sémantique qui concerne la compréhension de la notion d'extremum et son lien avec le DL, ainsi que le sens de maximiser ou de minimiser une fonction objective. Surtout, lorsqu'il s'agit de procéder par la méthode lagrangienne. Alors, plusieurs étudiants n'arrivent pas à évoquer d'une façon ou d'une autre, au début de leur solution, l'opération de la notion d'extremum et son lien avec le DL. On peut relier cette carence à un engagement réfléchi, mais aussi à un manque de métaconnaissances et de discernement, choix éclairé.

Même si la situation proposée était équivalente à celle évoquée auparavant, et pourtant aucun des 20 étudiants n'arrive à la résoudre correctement. En effet, dans un travail sur l'interprétation des signes mathématiques par les étudiants, l'utilisation des registres de représentation sémiotique pour la construction du sens du problème s'avère primordiale.

7. CONCLUSION

Les résultats de l'analyse du problème de comportement du consommateur qui aboutit à la construction de la théorie de la demande, nous a permis de mettre en lumière les différentes difficultés des étudiants en ce qui concerne la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes. Les étudiants de la première année sciences économiques et gestion à l'université, vu le manque des composantes de contrôle qu'ils ont, semblaient avoir beaucoup de lacunes quant à la maîtrise de la méthode de résolution de problème économique à cause de la diversité de notions mathématiques susceptible d'être mobiliser dans ce problème.

Les résultats montrent aussi que même si les procédures syntaxiques sont pour la plupart des questions mieux représentées, de nombreux étudiants mobilisent peu les autres composantes du contrôle.

Le type de problème proposé aux étudiants permet la proclamation de nombreuses connaissances mathématiques et économétrique sollicite davantage de faire appel aux différents indicateurs de l'activité de contrôle que doit exercer l'étudiant lors de la résolution de ce problème. Le cadre de référence de l'activité de contrôle développé par les chercheurs Saboya (2010) et Dufour & Jeannotte (2013), nous a servi d'ancrage pour repérer et faire comprendre les difficultés qui entravent le processus de résolution de ce problème. Voire, mettre en place les composantes du contrôle exercé par l'étudiant [9, 10].

Par ailleurs, nous avons remarqué que le manque de développement de différentes composantes du contrôle était plus problématique pour une bonne maîtrise de la démarche de résolution de problèmes articulant les notions de la microéconomie et l'outil mathématique adéquat.

Par son apport sur le plan didactique, cette étude évolue dans le temps et être généralisée si l'accès au terrain était opportun. En dépassant les limites rencontrées qui sont de certaines conditions de l'expérimentation, la petite taille de l'échantillon et la durée courte de l'essai. Dans le même sens, il y a des situations dans lesquelles on ne peut pas séparer l'observation et l'action. Une limite classique, du point de vue scientifique, est que la subjectivité des chercheurs est mobilisée et donc qu'un recul est difficile.

Les résultats apportent également un éclairage par rapport aux défis perçus en lien avec le problème proposé. Le besoin de développer des stratégies de contrôle chez les étudiants, par une formation massive restée inabordable. D'autres défis résident selon les participants du côté de la confiance en mathématiques, car le manque de spécialisation de ses étudiants dans le domaine mathématique est vu comme un frein au développement de la stratégie de contrôle.

Cette étude montre que l'analyse d'un problème sous l'angle des composantes de contrôle exercé par les étudiants sur un problème économique peut enrichir le répertoire de l'expérience d'un enseignant. Afin d'intervenir à des moments opportuns de dépassement d'obstacle d'apprentissage et au niveau de l'instauration des conditions favorables à un débat interdisciplinaire dans une classe.

8. REFERENCES

- [1] Lesourme, J., Orléan, A. et Walliser, B., (2002), *Leçons de microéconomie évolutionniste*. édition ODILE JAKOBE.
- [2] Simon, H. (1982). *Models of bounded rationality*, MIT Press.
- [3] Darreau, P. (2000). *Mathématique et Science Economique*. Conférences tout public "Fête de la Science" semaine du 16 au 22 octobre. Université de Limoges.
- [4] Duesenberry, J.S. (1949) JAMES S. *Income Saving and the Theory of Consumer Behavior* Cambridge Mass. Harvard University Press 1949 In-80 -128.
- [5] Bernier, B. et Louis, V.H., (1998). *Initiation à la Microéconomie*, édition, DUNOD, Paris.
- [6] Dorfman, R. and Steiner, P.O. (1954) *Optimal Advertising and Optimal Quality*. *American Economic Review*, 44, 826-836.
- [7] Crahay, M. (2005). La difficulté d'articuler diverses procédures dans des problèmes complexes. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (177-199). Bruxelles : De Boeck.
- [8] Selden, A., Selden, J., Hauk, S. et Mason, J. (1999). *Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems?* Tennessee Technological University. Cookeville, TN.
- [9] Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat. Université du Québec à Montréal.
- [10] Dufour & Jeannotte. La tâche non routinière sous l'angle du contrôle : un exemple en calcul différentiel. *Bulletin AMQ*. 2013 ; LIII(4).
- [11] Cournot, A.A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*.
- [12] Leontief, W. W. *Quantitative Input-Output Relations in the Economic System of the United State*, *Review on Economics and Statistics*. 1936; 18:105-125.
- [13] Coppé, S. (1995). Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique de son travail, différents types de savoirs et leur articulation, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions, 129-144.
- [14] Margolinas, C. *Éléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1992 ; 12(1) : 113-158.
- [15] Burgermeister, p.f. & Coray, M. *Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 2008 ; 28(1) : 63-106.
- [16] Artigue, M. (1993). Connaissances et métaconnaissances -une perspective didactique. Dans M. Baron A. Robert A. (Dir.), *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques* (p.29-54) Cahier de DIDIREM, IREM, Paris.

- [17] Schoenfeld, A. H. (Ed.). (1994). Studies in mathematical thinking and learning. Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc
- [18] Vergnaud G. (1983). Cross-reference of arithmetical tasks to physics and mathematics in the elementary and secondary schools. In Zweng M. et al. (Eds.). Proceedings of the fourth international congress on mathematical education, Boston : Birkhauser, pp. 517-520.
- [19] Coppé, S. (1993) Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de premières scientifiques en situation de devoir surveillé. Thèse de doctorat inédite. Université de Lyon.
- [20] Richard, F. (1998). Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions. Université de Paris VII.
- [21] Perkins, D.N., et Simmons R. Patterns of Misunderstanding : An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research*. 1988; 58 (3) : 303-326.
- [22] Kargiotakis, G. (1996) Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique : le cas des associations droites-équations. Thèse de doctorat inédite. Université Paris VII -Denis Diderot.
- [23] Margolinas, C. (1989). Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques. Thèse de doctorat inédite. Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- [24] Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Academic Press.
- [25] Piaget, J. (1974). Recherches sur la contradiction. Avec la collaboration de A. Blanchet, G. Cellier, C. Dami, M. Gainotti-Amann, Ch. Giliéron, A. Henriques-Christophides, M. Labarthe, J. De Lannoy, R. Maier, D. Maurice, J. Montangero, O. Mosimann, C. Othenin-Girard, D. Uzan, Th. Vergopoulos. Les différentes formes de la contradiction. Volume 2. Presses Universitaires de France. Paris.
- [26] Vergnaud, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1990 ; 10(2/3): 133-170.
- [27] Dodge, Y. (2007). Mathématiques de base pour économistes. Paris. Édition brochée.
- [28] Oliveira, I., Bednarz, N. et Lajoie, C. (2007). Développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité : Analyse d'une pratique d'enseignement au secondaire en regard du jugement porté sur la reconnaissance de situations proportionnelles. Actes du colloque EMF 2006. Sherbrooke (Québec).
- [29] Kouki, R. (2007). L'articulation syntaxe/sémantique au Cœur des analyses didactiques au niveau de l'algèbre élémentaire? Actes du colloque international EMF 2006. Sherbrooke (Québec).

Liste d'acronyme:

DL	Développements limités
EAMC	Exercé une Action Mathématique liée à cette Composante de contrôle
EAMCE	Exercé une Action Mathématique liée à cette Composante avec Erreur
AAMC	Absence d'action mathématique liée à cette composante
CT	Coût total de production



Cite this article: Nazha EL Boufi et Said Abouhanifa. Analyse du processus de résolution d'un problème économique à travers les techniques d'optimisations. *Am. J. innov. res. appl. sci.* 2019; 8(5): 161-176.

This is an Open Access article distributed in accordance with the Creative Commons Attribution Non Commercial (CC BY-NC 4.0) license, which permits others to distribute, remix, adapt, build upon this work non-commercially, and license their derivative works on different terms, provided the original work is properly cited and the use is non-commercial. See: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>